

Opción A

Ejercicio 1 opción A, modelo 4 Septiembre 2014

[2'5 puntos] Sabiendo que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(3x) - e^x + ax}{x \cdot \sin(x)}$ es finito, calcula a y el valor del límite.

Solución

Sabiendo que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(3x) - e^x + ax}{x \cdot \sin(x)}$ es finito, calcula a y el valor del límite.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(3x) - e^x + ax}{x \cdot \sin(x)} = \frac{\cos(0) - e^0 + a(0)}{0 \cdot \sin(0)} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0}$$

Le aplicamos la regla de L'Hôpital (si "f" y "g" son funciones continuas en $[a - \delta, a + \delta]$,

derivables en $(a - \delta, a + \delta)$, verificando que $f(a) = g(a) = 0$ y $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$, entonces si existe

$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ se verifica que $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$. La regla es válida si tenemos ∞/∞ , y también

si $x \rightarrow \infty$), con lo cual tenemos

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(3x) - e^x + ax}{x \cdot \sin(x)} = (L'H) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin(3x) \cdot 3 - e^x + a}{1 \cdot \sin(x) + x \cdot \cos(x)} = \frac{-\sin(0) \cdot 3 - e^0 + a}{1 \cdot \sin(0) + 0 \cdot \cos(0)} = (-1 + a)/0.$$

Como me dicen que el límite existe y es finito **el numerador ha de ser cero**, para poder seguir aplicándole la regla de L'Hôpital, es decir $-1 + a = 0$, de donde **$a = 1$** .

Volviéndole a aplicar la regla de L'Hôpital, con $a = 1$, tenemos que **el límite es:**

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin(3x) \cdot 3 - e^x + 1}{1 \cdot \sin(x) + x \cdot \cos(x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\cos(3x) \cdot 9 - e^x}{\cos(x) + 1 \cdot \cos(x) + x \cdot (-\sin(x))} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-9\cos(3x) - e^x}{2\cos(x) - x \cdot \sin(x)} = \\ &= \frac{-9\cos(0) - e^0}{2\cos(0) - 0 \cdot \sin(0)} = (-9 - 1)/(2) = -10/2 = -5. \end{aligned}$$

Ejercicio 2 opción A, modelo 4 Septiembre 2014

[2'5 puntos] Calcula $\int_0^1 \frac{x^2}{2x^2 - 2x - 4} dx$.

Solución

Calcula $\int_0^1 \frac{x^2}{2x^2 - 2x - 4} dx$.

Determinamos primero la integral indefinida $I = \int \frac{x^2}{2x^2 - 2x - 4} dx = \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{x^2 - x - 2} dx$.

Es una integral racional, y como el grado del numerador y el denominador son iguales, efectuamos la división entera antes.

$$\frac{x^2}{-x^2 + x + 2} = \frac{x^2 - x - 2}{x + 2} + 1$$

$$I = (1/2) \cdot \int ((Cx) + R(x))/(d(x)) dx = (1/2) \cdot \int (1) dx + \frac{1}{2} \int \frac{(x+2)dx}{x^2 - 2x - 2} = (1/2) \cdot x + (1/2) \cdot I_1$$

I_1 ya es racional y descomponemos el denominador en producto de factores:

Resolviendo $x^2 - x - 2 = 0$, obtenemos $x = -1$ y $x = 2$.

$$I_1 = \int \frac{(x+2)dx}{x^2 - 2x - 2} = \int \frac{(x+2)dx}{(x+1) \cdot (x-2)} = \int \frac{A dx}{(x+1)} + \int \frac{B dx}{(x-2)} = A \cdot \ln|x+1| + B \cdot \ln|x-2|.$$

Calculamos A y B

$$\frac{(x+2)}{(x+1) \cdot (x-2)} = \frac{A}{(x+1)} + \frac{B}{(x-2)} = \frac{A(x-2) + B(x+1)}{(x+1) \cdot (x-2)}. \quad \text{Igualando numeradores:}$$

$$x+2 = A(x-2) + B(x+1). \quad (\text{Le damos a "x" el valor de las raíces, -1 y 2})$$

$$\text{De } x = -1 \rightarrow -1+2 = A(-1-2) + B(-1+1) = -3A, \text{ de donde } A = -1/3.$$

$$\text{De } x = 2 \rightarrow 2+2 = A(2-2) + B(2+1) = 3B, \text{ de donde } B = 4/3.$$

$$\text{Por tanto } I = (1/2) \cdot x + (1/2) \cdot I_1 = (1/2) \cdot x + (1/2) \cdot ((-1/3) \cdot \ln|x+1| + (4/3) \cdot \ln|x-2|).$$

$$\begin{aligned} \text{Luego } \int_0^1 \frac{x^2}{2x^2 - 2x - 4} dx &= [(1/2) \cdot x + (1/2) \cdot ((-1/3) \cdot \ln|x+1| + (4/3) \cdot \ln|x-2|)]_0^1 = \\ &= [(1/2) \cdot 1 + (1/2) \cdot ((-1/3) \cdot \ln|1+1| + (4/3) \cdot \ln|1-2|)] - [(1/2) \cdot 0 + (1/2) \cdot ((-1/3) \cdot \ln|0+1| + (4/3) \cdot \ln|0-2|)] = \\ &= (1/2) + (1/2) \cdot ((-1/3) \cdot \ln|2| + (4/3) \cdot \ln|1|) - [0 + (1/2) \cdot ((-1/3) \cdot \ln|1| + (4/3) \cdot \ln|2|)] = \\ &= (1/2) + (1/2) \cdot ((-1/3) \cdot \ln(2) - (4/3) \cdot \ln(2)) = (1/2) - (1/6) \cdot \ln(2) - (2/3) \cdot \ln(2) = \\ &= (1/2) - (5/6) \cdot \ln(2) \cong -0'0776723 \end{aligned}$$

Ejercicio 3 opción A, modelo 4 Septiembre 2014

Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales,

$$x - y + mz = 0$$

$$mx + 2y + z = 0$$

$$-x + y + 2mz = 0$$

a) [0'75 puntos] Halla los valores del parámetro m para los que el sistema tiene una única solución.

b) [1 punto] Halla los valores del parámetro m para los que el sistema tiene alguna solución distinta de la solución nula.

c) [0'75 puntos] Resuelve el sistema para $m = -2$.

Solución

Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales,

$$x - y + mz = 0$$

$$mx + 2y + z = 0$$

$$-x + y + 2mz = 0$$

a) y b)

Halla los valores del parámetro m para los que el sistema tiene una única solución.

La matriz de los coeficientes del sistema es $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & m \\ m & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2m \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & m & 0 \\ m & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2m & 0 \end{pmatrix}.$$

Como vemos $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*)$ al ser un sistema homogéneo (términos independientes 0), por tanto el sistema es siempre compatible.

El sistema tiene una única solución, la trivial $(x,y,z) = (0,0,0)$, si el determinante de la matriz de los coeficientes A es distinto de cero.

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & m \\ m & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2m \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ F_3 + F_1 \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & m \\ m & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3m \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{Adjuntos} \\ \text{tercera} \\ \text{fila} \end{matrix} = 0 + 0 + 3m(2+m) = 3m(2+m).$$

Resolviendo la ecuación $3m(2+m) = 0$, obtenemos $3m = 0$ y $2+m = 0$, de donde $m = 0$ y $m = -2$.

Si $m \neq 0$ y $m \neq -2$, $\det(A) = |A| \neq 0$, $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*) = 3 = n^\circ$ de incógnitas. **El sistema es compatible y determinado y tiene solución única, la trivial $(x,y,z) = (0,0,0)$.**

Si $m = 0$ y $m = -2$, $\det(A) = |A| = 0$, $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*) < 3 = n^\circ$ de incógnitas. **El sistema es compatible e indeterminado y tiene infinitas soluciones**

c)
Resuelve el sistema para $m = -2$.

Ya hemos visto que para $m = -2$, el sistema es compatible e indeterminado y tiene infinitas soluciones.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -4 \end{pmatrix} \text{ y } A^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -4 & 0 \end{pmatrix}.$$

En A como $\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = 4 + 2 = 6 \neq 0$, tenemos $\text{rango}(A) = 2$.

Como el rango es 2 con dos ecuaciones es suficiente, tomamos la 1ª y 3ª ecuación pues con ellas he formado el menor distinto de cero.

$$\begin{aligned} x - y - 2z &= 0 & \rightarrow & x - y - 2z = 0 \\ -x + y - 4z &= 0. & F_2 + F_1 & \rightarrow -6z = 0, \text{ de donde } z = 0. \end{aligned}$$

Tomo $x = a \in \mathbb{R}$, con lo cual $y = x = a$.

Solución $(x,y,z) = (a, a, 0)$ con $a \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 4 opción A, modelo 4 Septiembre 2014

Considera los puntos $A(1,1,2)$ y $B(1,-1,-2)$ y la recta r dada por $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = t \\ z = 1 \end{cases}$.

(a) [1 punto] Halla la ecuación general del plano que contiene a r y es paralelo a la recta que pasa por A y B.

(b) [1'5 puntos] Halla el punto de la recta r que está a la mínima distancia de A y B.

Solución

Considera los puntos $A(1,1,2)$ y $B(1,-1,-2)$ y la recta "r" dada por $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = t \\ z = 1 \end{cases}$.

(a)
Halla la ecuación general del plano que contiene a r y es paralelo a la recta que pasa por A y B.

Como el plano contiene a "r" tomo de "r" un punto, el C y un vector, el u . Como el plano es paralelo a la recta que pasa por A y B, tomo de dicha recta el otro vector independiente, el AB . La ecuación general del plano pedida es $\det(\mathbf{CX}, \mathbf{u}, \mathbf{AB}) = 0$, siendo $X(x,y,z)$ un punto genérico del plano.

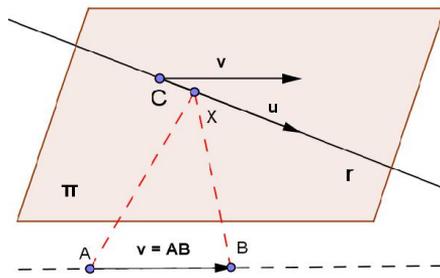
De la recta "r" tenemos el punto $C(1,0,1)$ y el vector $u = (2,1,0)$.

$$\mathbf{v} = \mathbf{AB} = (1,-1,-2) - (1,1,2) = (0,-2,-4)$$

$$\pi \equiv \det(\mathbf{CX}, \mathbf{u}, \mathbf{AB}) = 0 = \begin{vmatrix} x-1 & y & z-1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -4 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \text{Adjuntos} \\ \text{primera} \\ \text{fila} \end{array} = (x-1)(-4+0) - (y)(-8-0) + (z-1)(-4-0) =$$

$$= -4x + 4 + 8y - 4z + 4 = -4x + 8y - 4z + 8 = -x + 2y - z + 2 = 0.$$

Un esbozo de la figura es:



(b)

Halla el punto de la recta r que está a la mínima distancia de A y B.

El dibujo anterior nos sirve, donde X es un punto genérico de la recta.
 $X(1+2t, t, 1)$; $A(1,1,2)$ y $B(1,-1,-2)$

Tenemos que resolver la ecuación $d(A,X) = d(B,X)$, es decir $\|AX\| = \|BX\|$.

$$AX = (1+2t, t, 1) - (1,1,2) = (2t, t-1, -1)$$

$$BX = (1+2t, t, 1) - (1,-1,-2) = (2t, t+1, 3)$$

De $\|AX\| = \|BX\|$, tenemos $\sqrt{(2t)^2 + (t-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{(2t)^2 + (t+1)^2 + (3)^2}$. Elevando al cuadrado:

$$(2t)^2 + (t-1)^2 + (-1)^2 = (2t)^2 + (t+1)^2 + (3)^2 \rightarrow t^2 - 2t + 1 + 1 = t^2 + 2t + 1 + 9 \rightarrow -4t = 8, \text{ de donde } t = -2 \text{ y el punto buscado es } X(1+2(-2), -2, 1) = X(-3, -2, 1).$$

Opción B

Ejercicio 1 opción B, modelo 4 Septiembre 2014

[2'5 puntos] De entre todos los número reales positivos, determina el que sumado con su inverso da suma mínima.

Solución

Es un problema de optimización.

Función a minimizar: $S(x) = x + 1/x$, con $x > 0$.

Si $S'(a) = 0$ y $S''(a) > 0$, $x = a$ es un mínimo de $S(x)$

$S'(x) = 1 - 1/x^2$. De $S'(x) = 0$, tenemos $1 - 1/x^2 = 0$, es decir $1 = 1/x^2$ de donde $x^2 = 1$, y sus soluciones son $x = \pm 1$. Como $x > 0$, sólo sirve $x = 1$.

El n° que sumado con su inverso, da una suma mínima es el 1, y la suma es $1 + 1/1 = 2$.

Veamos que $x = 1$ es un mínimo, viendo que $S''(1) > 0$

De $S'(x) = 1 - 1/x^2$, tenemos $S''(x) = 0 - (-2x/x^4) = 2/x^3$, por tanto sustituyendo tenemos $S''(1) = 2/1 = 2 > 0$, luego $x = 1$ es un mínimo.

Ejercicio 2 opción B, modelo 4 Septiembre 2014

[2'5 puntos] Calcula $\int_0^{\pi/4} \frac{x}{\cos^2(x)} dx$ (Sugerencia: integración por partes).

Solución

Resolvemos primero la integral indefinida $I = \int \frac{x}{\cos^2(x)} dx = \{ \text{Integral por partes por partes} \}$

$\int u dv = uv - \int v du$. En nuestro caso $u = x$ y $dv = \frac{dx}{\cos^2(x)}$, de donde $du = dx$ y $v = \int dv =$

$$= \int \frac{dx}{\cos^2(x)} = \text{tg}(x) \} = x \cdot \text{tg}(x) - \int \text{tg}(x) dx = x \cdot \text{tg}(x) - \int \frac{\text{sen}(x)}{\cos(x)} dx = x \cdot \text{tg}(x) - (-\ln(\cos(x))) =$$

$$= x \cdot \text{tg}(x) + \ln(\cos(x)).$$

$$\text{Luego } \int_0^{\pi/4} \frac{x}{\cos^2(x)} dx = [x \cdot \text{tg}(x) + \ln(\cos(x))]_0^{\pi/4} =$$

$$= (\pi/4) \cdot \text{tg}(\pi/4) + \ln(\cos(\pi/4)) - (0 \cdot \text{tg}(0) + \ln(\cos(0))) = \pi/4 \cdot (1) + \ln((\sqrt{2})/2) - 0 - \ln(1) =$$

$$= \pi/4 + \ln((\sqrt{2})/2).$$

Ejercicio 3 opción B, modelo 4 Septiembre 2014

Sabiendo que el determinante de la matriz $A = \begin{pmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ es 2, calcula los siguientes

determinantes:

(a) [0'5 puntos] $\det(3A)$.

(b) [0'5 puntos] $\det(A^{-1})$.

(c) [0'75 puntos] $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 3x & 2y & z \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix}$.

(d) [0'75 puntos] $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x+2 & y+4 & z+6 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$.

Solución

Sabiendo que el determinante de la matriz $A = \begin{pmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ es 2, calcula los siguientes

determinantes:

(a) y (b)

$\det(3A)$ y $\det(A^{-1})$.

(i) Sabemos que $\det(k \cdot A_n) = (k)^n \cdot \det(A)$ y que $\det(A^{-1}) = 1/(\det(A))$, porque de $A^{-1} \cdot A = I$, aplicándole determinantes $|A^{-1} \cdot A| = |I| = 1 = |A^{-1}| \cdot |A|$.

Luego $\det(3A) = (3)^3 \cdot \det(A) = 27 \cdot (2) = 54$, y $\det(A^{-1}) = 1/(\det(A)) = 1/2$.

(c)

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 3x & 2y & z \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

(ii) Si una fila (columna) de un determinante esta multiplicada por un número, dicho número sale fuera multiplicando a todo el determinante.

(iii) Si intercambiamos entre si dos filas (columnas) de un determinante el determinante cambia de signo.

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 3x & 2y & z \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \{\text{aplicamos (ii)}\} = (3) \cdot (2) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ x & y & z \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \{\text{aplicamos (iii)}\} =$$

$$= (6)(-1) \cdot \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (6)(-1)(2) = -12.$$

(d)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x+2 & y+4 & z+6 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

(iv) Si una fila (columna) un determinante es suma de dos sumandos, dicho determinante se puede descomponer en suma de dos determinantes colocando en dicha fila (columna) el primer y segundo sumando respectivamente.

(v) Si un determinante tiene dos filas iguales o proporcionales, dicho determinante vale 0.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x+2 & y+4 & z+6 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \{\text{aplicamos (iv)}\} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x & y & z \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \{\text{aplicamos (ii), (iii) y (v)}\} =$$

$$= (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x & y & z \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} + 0 = (-1) \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 2 = -2.$$

Ejercicio 4 opción B, modelo 4 Septiembre 2014

Sea r la recta que pasa por los puntos $A(1,0,-1)$ y $B(2,-1,3)$.

(a) [1'25 puntos] Calcula la distancia del origen de coordenadas a la recta r .

(b) [1'25 puntos] Halla la ecuación de la recta que corta perpendicularmente a r y pasa por el origen de coordenadas.

Solución

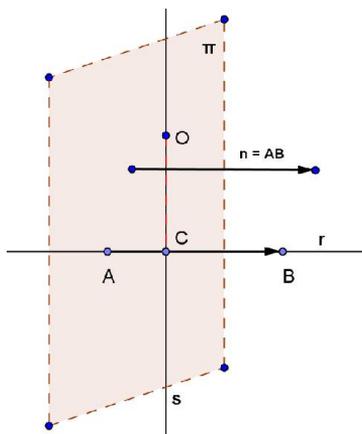
Sea r la recta que pasa por los puntos $A(1,0,-1)$ y $B(2,-1,3)$.

(a)

Calcula la distancia del origen de coordenadas a la recta r .

Vamos a calcular la distancia de punto a recta, como si calculáramos el simétrico de un punto respecto a la recta, porque nos servirá para el apartado (b).

Veámoslo con una figura.



Ponemos la recta "r" en paramétricas, tomando como punto el $A(1,0,-1)$ y como vector de

dirección el $\mathbf{u} = \mathbf{AB} = (2,-1,3) - (1,0,-1) = (1,-1,4)$, con lo cual "r" \equiv
$$\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 0 - \lambda \\ z = -1 + 4\lambda \end{cases} \text{ con } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Calculamos el plano es perpendicular " π " a " r " que pasa por el origen $O(0,0,0)$. Su vector normal \mathbf{n} coincide con el vector director de " r " el $\mathbf{u} = \mathbf{AB} = (1,-1,4)$.

La ecuación del plano π es $\mathbf{OX} \bullet \mathbf{n} = 0$, siendo $X(x,y,z)$ un punto genérico del plano y " \bullet " el producto escalar:

$$\pi \equiv \mathbf{OX} \bullet \mathbf{n} = 0 = (x,y,z) \bullet (1,-1,4) = x - y + 4z = 0.$$

Calculamos el punto de corte C del plano π con la recta r , sustituyendo la recta en el plano:

$$(1+\lambda) - (-\lambda) + 4(-1+4\lambda) = 0 \rightarrow -3+18\lambda = 0 \rightarrow \lambda = 3/18 = 1/6.$$

$$\text{El punto C es } C(1+(1/6), -(1/6), -1+4(1/6)) = C(7/6, -1/6, -2/6).$$

Por la construcción que hemos hecho la distancia del origen O a la recta r es la distancia del punto O al punto C .

$$\mathbf{d}(\mathbf{O}, r) = \mathbf{d}(\mathbf{O}, \mathbf{C}) = \|\mathbf{OC}\| = \sqrt{((7/6)^2 + (1/6)^2 + (2/6)^2)} = \sqrt{(54/36)} \cong 1'225 \text{ u.l.}$$

(b)
Halla la ecuación de la recta que corta perpendicularmente a r y pasa por el origen de coordenadas.

Por la construcción que hemos hecho la distancia, la recta que corta perpendicularmente a r y pasa por el origen de coordenadas del origen O , es la recta s que pasa por el punto O y el punto C .

Recta " s ", punto el $O(0,0,0)$; vector dirección el $\mathbf{OC} = (7/6, -1/6, -2/6)$; otro es el $\mathbf{v} = (7, -1, -2)$:

$$\text{La recta en paramétricas es "s"} \equiv \begin{cases} x = 0 + 7\lambda \\ y = 0 - \lambda \\ z = 0 - 2\lambda \end{cases} \text{ con } \lambda \in \mathbb{R}$$